数理解析研究所講究録
第 1548 巻 2007 年 71-76

直線上あるいは空間での探索ゲーム

兵庫県立大学・経営学部　菊田健作 (KIKUTA Kensaku)

1. はじめに

Ruckle(1983) の第 3 章において、player の純戦略が直線、平面あるいは 3 次元以上の空間内での部分集合であるような 2 人ゲーム (geometric game) について解説されている。本稿の目的は、特に Hiding in a Disc Game(HDG) を紹介することである。探知領域の大きさによっては、Ruckle(1983) においてゲームの解が記述されていない場合がある。本稿ではこの部分に注目し、すぐに導かれる性質を交えながら問題点を指摘する。直線上でのゲームの精密な分析については例えば Garnaev(2000) を参照されたい。

2. モデル

平面上の中心が r、半径が c であるような円（周も含む）を $D(r;c)$ と書くことにする。特に、$D \equiv D(o;1)$ とおく。ここに、o はある固定された点である。2 人の player (RED と BLUE) が平面上の円 D 上の点 r, b をそれぞれ選ぶ（図 1 参照)。$|r-b| \leq c$ つまり $b \in D(r;c)$ であれば RED は 1 を受け取る。そうでないときは 0 を受け取る。ここに、$0 \leq c \leq 1$ とする。

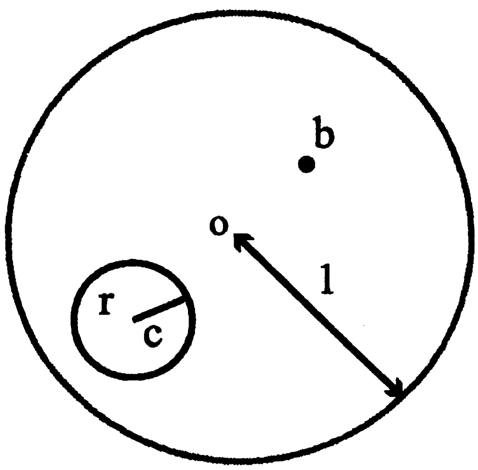

図 1 :The Hiding in a Disc Game

$c=1$ のときは、RED は確率 1 で円 D の中心 o を選ぶことによって確実に BLUE を発見できる。よって HDG の値は 1 である。c が比較的大きい場合、Ruckle(1983) にゲームの解が次のように与えられている。

定理 1 (Ruckle (1983), p.99)
探知領域 $D(r;c)$ の半径 c について $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c < 1$ を仮定する。ゲーム HDG の値は $\frac{1}{\pi}\arcsin c$ である。RED の 1 つの最適戦略は中心から距離 $c' \equiv \sqrt{1-c^2}$ の円 $D(o;c')$ の周上に一様に分布すること、BLUE の 1 つの最適戦略は円 D の周上に一様に分布することである。
証明の概略: $c \geq c'$ に注意する。HDG の値の下限が $\frac{1}{\pi}\arcsin c$ であることを示すために図 2 の左側を用いる。一方、HDG の値の上限が $\frac{1}{\pi}\arcsin c$ であることを示すために図 2 の右側を用いる。□

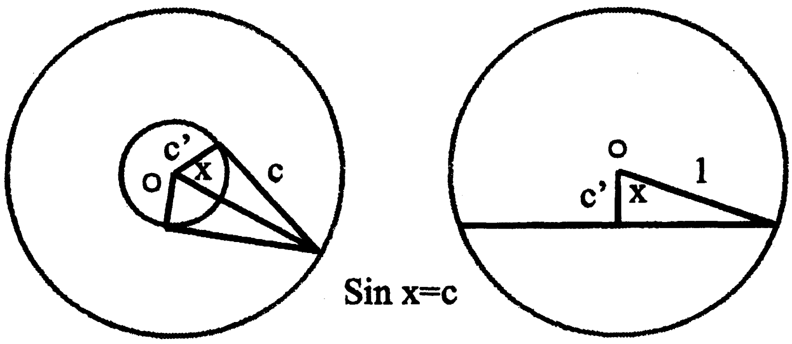

図 2 :Optimal Strategies

また、$c=\frac{1}{2}$ の場合、Ruckle(1983),p.101 においてゲームが解かれている。それによると、ゲームの値は $\frac{1}{7}$ である。RED の 1 つの最適戦略は、円 D の中心 o および円 D に内接する正六角形の各辺の中点をそれぞれ確率 $\frac{1}{7}$ で選ぶことである。BLUE の 1 つの最適戦略は、円 D の中心 o を確率 $\frac{1}{7}$ で、また円 D の周上の各点を一様に $\frac{6}{7}$ の重みを付けて選ぶことである。

3. ゲームの値の上限・下限

探知領域の半径 c が,

$$0 < c < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad かつ \quad c \neq \frac{1}{2}$$

の場合、Ruckle(1983) においては未解決とされている。本節では、$\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の場合に HDG の値の上限、下限を考察する。

命題 2

探知領域の半径について $\frac{1}{2} \le c \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ を仮定する。

$$\frac{\arcsin c}{\pi + \arcsin c - \arccos \frac{1}{2c}}$$

は HDG の値の上限である。

証明: まず、$c' \ge c$ であることに注意する。BLUE の戦略で、円 D の中心 o を確率 x で、また円 D の周上の各点を一様に $1-x$ の重みを付けて選ぶようなものを考える。探知領域 $D(r;c)$ に円 D の中心 o を含み、しかも円 D の周を最大に含むのは、点 o からの距離が c であるところに RED が位置するときである（例えば、図 3 で $r = r_1$）。このとき、確率 $x + (1-x)\frac{2y}{2\pi}$ で BLUE は発見される。一方、探知領域 $D(r;c)$ に円 D の中心 o を含まず、しかも円 D の周を最大に含むのは、点 o からの距離が c' であるところに RED が位置するときである（例えば、図 3 で $r = r_2$）。このとき確率 $(1-x)\frac{2z}{2\pi}$ で発見される。

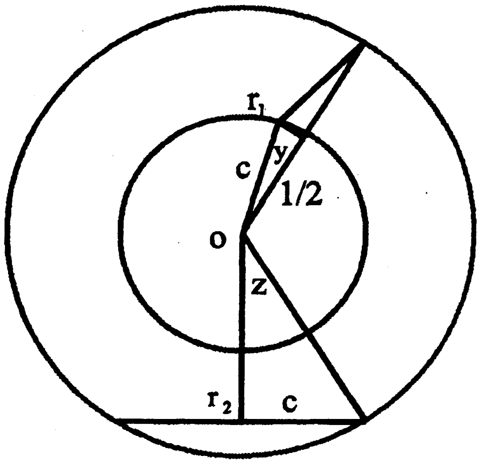

図 3 : For Upperbound

$\sin z = c, \cos y = \frac{1}{2c}$ であるから

$$x + (1-x)\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{2c} = (1-x)\frac{1}{\pi}\arcsin c$$

であるように x を定めておけば、発見される確率は高々上の方程式の両辺の値となる。□

注意: $\frac{1}{2} < c < \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるとき、$\arcsin c > \arccos \frac{1}{2c}$ が成り立つ。よって、定理 1 で与えられたゲームの値は命題 2 で与えられた上限より小さくない。

命題 3
探知領域の半径について $\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ を仮定する。

$$\frac{\arcsin c}{\pi + \arcsin c}$$

はゲーム HDG の値の下限である。

証明: RED の戦略で、円 D の中心 o を確率 x で選び、かつ円 $D(o;c')$ の周上の各点を一様に $1-x$ の重みを付けて選ぶようなものを考える。BLUE の位置 b を中心にした半径 c の円 $D(b;c)$ 上に RED がいるとき RED は BLUE を発見できる。そこで、D の中心 o から周上の点 b_1 に向かって線分 ob_1 上を BLUE が移動したとする。$c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ および $b_2b_4 \leq c$ に注意すると、線分 b_1b_2 上では、両端 b_1 にいるときが、RED に発見される確率が最も小さく $(1-x)\frac{1}{\pi}\arcsin c$ である。ここに、$\overline{b_2b_3} = \overline{b_1b_3} = c$ であり、$\angle ob_3b_1 = \frac{\pi}{2}$ とする。一方、$\overline{ob_1} = 1$ でありさらに仮定より $c \geq \frac{1}{2}$ であるから、$\overline{ob_2} = 1 - 2c^2 \leq c$ となる。よって、線分 ob_2 上では、RED に発見される確率が少なくとも x あり、例えば点 o に BLUE がいるときは x に等しい。

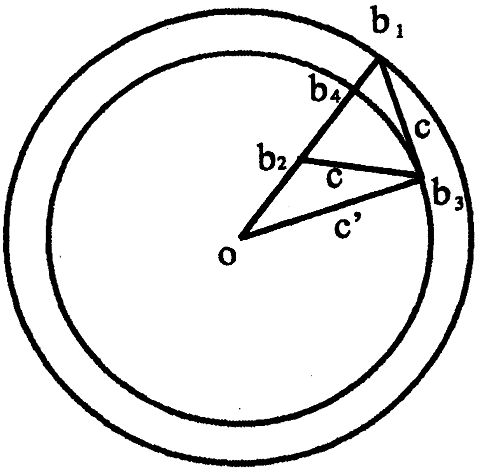

図 4 : For Lowerbound

ゆえに

$$x = (1-x)\frac{1}{\pi}\arcsin c.$$

が成り立つように x を選んでおけば、 発見する確率は少なくとも上式の両辺の値となる。
□

注意: Ruckle(1983), p.108, は、American Mathematical Monthly 82(1975),p.521 において Bordelon が命題 3 の下限値と同じ値をゲームの値として与えているがそれが誤りで

あることを次の命題 4 によって指摘している（さらに図 5 参照)。

命題 4 (Ruckle(1983),p.108-9)
探知領域の半径について $\frac{1}{2} \leq c$ を仮定する。

$$\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{2c}$$

はゲーム HDG の値の下限である。

次の図 5 は命題 2-4 で与えられた上限、下限のグラフを描いている。$c = \frac{1}{2}$ のときは命題 2 および 3 で与えられた上限、下限はともにゲームの値 $\frac{1}{7}$ に一致する。一方、$c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは命題 2 および 4 で与えられた上限、下限はともにゲームの値 $\frac{1}{4}$ に一致する。

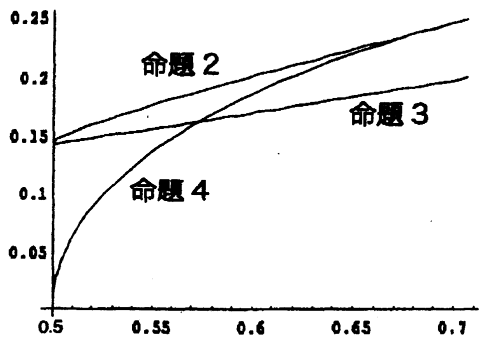

図 5：ゲームの値の上限・下限

4. おわりに
探知領域の半径 c を $c = \sin\gamma$ とおくと、$0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ である。ゲームの解が得られているのは、$\frac{\pi}{4} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ および $\gamma = \frac{\pi}{6}$ の場合である。$0 \leq c \leq \frac{1}{2}$ であるとき、BLUE は円 D の中心 o に確率 $\frac{\arcsin c}{\pi + \arcsin c}$ で、また残りの確率で円 D の周上に一様に分布することにより、発見される確率を高々 $\frac{\arcsin c}{\pi + \arcsin c}$ にすることが出来る。証明は命題 2 と同様であるがより易しい。また、円 D 上に一様に分布すれば、発見される確率を高々 c^2 とできる。よって、c の値に依存して上述の戦略のいずれかを選べば、高々 $\min\{c^2, \frac{\arcsin c}{\pi + \arcsin c}\}$ とできる。一方、RED は円 D に一様に分布することにより少なくとも $\frac{c^2}{\pi} \arccos \frac{c}{2}$ を確保できる。証明は省略する。これらのグラフを図 6 に示す。c が小さいときの RED の最適戦略を求めるためには、2 個以上の同心円の上での分布を考える等精密な分析が要求される。第 1 節で述べたように、本稿は Ruckle(1983) を基にして書かれたものである。また、本稿の定理 1 や命題 4 の証明を参考にすると容易に命題 2 および 3 を得る。

Garnaev(1983) や Alpern/Gal(2003) には、HDG についての記述はないように見受けられる。しかし、探知領域の半径 c が非常に小さい場合は、Alpern/Gal(2003, pp.39-41) や Lalley/Robbins(1989) が参考になる。さらに文献を調査して未解決の部分を明瞭にしゲームの解を解析的に探究することが今後の検討課題である。

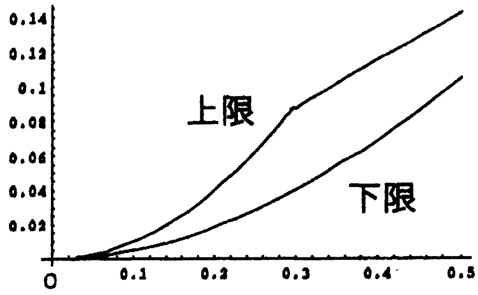

図 6：ゲームの値の上限・下限

参考文献

W.H.Ruckle 1983. Geometric Games and Their Applications. Pitman,Boston.MA

S.Lalley and H.Robbins 1989. Uniformly Ergodic Search in a Disc. Chapter 6 in Chudnovsky/Chudnovsky :*Search Theory: Some Recent Developments.* Marcel Dekker,New York.

A.Y. Garnaev 2000. Search Games and Other Applications of Game Theory. Springer. Berlin.

S.Alpern and S.Gal 2003. The Theory of Search Games and Rendezvous. Kluwer's INTERNATIONAL SERIES. Massachusetts.